# Chapitre 11 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

## Table des matières



*Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

# 1 Ensemble des matrices

## 1.1 Qu'est-ce qu'une matrice ?

**Définition 1.1** (matrice)

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Une matrice de $n$ lignes et $p$ colonnes (ou de taille $n \times p$), à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, que l'on représente sous forme d'un tableau de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

(le premier indice représente le numéro de la ligne, le second le numéro de la colonne).

**Notation :** Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

**Exemple 1.2 :** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

**Matrices lignes et matrices colonnes**

1. Une matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, est appelée matrice colonne. Elle est du type :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. Une matrice de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, est appelée matrice ligne. Elle est du type :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

## 1.2 Opérations sur les matrices

**Définition 1.3** (opérations $+$ et $\cdot$ sur les matrices)

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, soient $A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

1. La matrice $A + B$ est la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
2. La matrice $\lambda A$ est la matrice $D = (d_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

**Remarque :** Nous verrons plus tard dans l'année que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un « espace vectoriel ».

**Définition 1.4** (combinaison linéaire)

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, soient $A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Une combinaison linéaire de $A$ et $B$ est une matrice qui est de la forme $\lambda A + \mu B$, où $\lambda$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de $n$ matrices $A_1, \ldots, A_n$ est de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

**Matrices élémentaires :** Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position $(i,j)$ qui vaut 1. Ces matrices $E_{i,j}$ sont appelées matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

**Exemple 1.5 :** $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

**Proposition 1.6** (toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires)

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{i,j})$.
Alors
$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j} \,.$$

**Définition 1.7** (transposée d'une matrice)

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La transposée de la matrice $A$ est la matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $b_{i,j} = a_{j,i}$.
Elle est notée $A^T$ ou ${}^tA$.

Ainsi, transposer une matrice revient à faire une symétrie par rapport à la diagonale (descendante) de cette matrice : les lignes de $A$ deviennent les colonnes de $A^T$ et inversement.

**Exemple 1.8 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Déterminer la transposée de $A$.

**Remarques :**

1. La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne, et inversement.
2. La transposée d'une matrice carrée est une matrice carrée de même taille.
3. La transposition est une involution, c'est-à-dire que pour toute matrice $A$, $(A^T)^T = A$.

**Proposition 1.9** (transposition d'une combinaison linéaire)

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, soient $A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et soient $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.
Alors $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.

# 2 Produit de matrices

## 2.1 Définition du produit matriciel

**Définition 2.1** (produit de deux matrices)

Soient $n$, $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et soient $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
La matrice $AB$ est la matrice $(c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

**Remarque :** Pour pouvoir effectuer un produit de deux matrices, le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde.

**Exemple 2.2 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$ et $BA$.

**Cas particulier : produit par une matrice colonne**

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$. Plus précisément, $AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$ où $C_1, \dots, C_p \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont les colonnes de $A$.

**Remarque :** On souhaite calculer le produit de deux matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On note $C_1, \dots, C_q \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de la matrice $B$, de telle sorte que $B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_q \end{pmatrix}$.
Le produit $AB$ est alors obtenu en calculant le produit de $A$ par chaque matrice colonne $C_j$ (on obtient ainsi une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), puis en juxtaposant les colonnes obtenues, c'est-à-dire : $AB = \begin{pmatrix} AC_1 & \cdots & AC_q \end{pmatrix}$.

## 2.2 Propriétés du produit

**Théorème 2.3** (associativité du produit matriciel)

Soient $n$, $p$, $q$ et $r \in \mathbb{N}^*$, et soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
On a l'égalité : $(AB)C = A(BC)$.

Un tel produit sera donc noté plus simplement $ABC$, sans préciser l'ordre dans lequel on fait les multiplications.

**Théorème 2.4** (bilinéarité du produit matriciel)

Soient $n$, $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Soient $A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C,D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
*Linéarité à gauche :* $(A + \lambda B)C = AC + \lambda BC$. *Linéarité à droite :* $A(C + \lambda D) = AC + \lambda AD$.

**Proposition 2.5** (transposée d'un produit)

Soient $n$, $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^T = B^T A^T$.

## 2.3 Produit par des matrices élémentaires

Dans toute cette partie, on considère des entiers $n$, $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

**Produit à gauche par une matrice élémentaire**
Soit $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$), et soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
La matrice $E_{i,j}A$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que :
- sa $i$-ième ligne est égale à la $j$-ième ligne de $A$ ;
- ses autres lignes sont nulles.

**Exemple 2.6 :** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

**Produit à droite par une matrice élémentaire**
Soit $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (avec $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$), et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La matrice $AE_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que :
- sa $j$-ième colonne est égale à la $i$-ième colonne de $A$ ;
- ses autres colonnes sont nulles.

**Exemple 2.7 :** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

**Notation :** Pour la proposition suivante, nous introduisons le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ où $i,j \in \mathbb{Z}$.

**Proposition 2.8** (produit de deux matrices élémentaires)

Soient $n$, $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E'_{i,j}$ celles de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E''_{i,j}$ celles de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Alors pour tous $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$, $k \in [\![1,p]\!]$ et $l \in [\![1,q]\!]$ :

$$E_{i,j}E'_{k,l} = \delta_{j,k}E''_{i,l}$$

**Exemple 2.9 :** Dans $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, calculer $E_{1,2}E_{2,3}$ et $E_{2,3}E_{1,2}$.

# 3 Ensemble des matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $n$ lignes et $n$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Une telle matrice est appelée matrice carrée de taille $n$.

## 3.1 Matrices particulières

**Matrices symétriques et antisymétriques**

**Définition 3.1** (matrices symétriques, antisymétriques)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice carrée $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :
1. symétrique lorsque $A^T = A$ ;
2. antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

L'ensemble des matrices symétriques de taille $n$ est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, celui des matrices antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

**Exemple 3.2 :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{C})$.

**Remarques :**
1. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétriques sont nécessairement nuls.
2. Les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique sont quelconques (pas de relation sur ces coefficients).

**Matrices diagonales :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale lorsque : $\forall i,j,\ i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.

Une matrice diagonale est donc du type suivant : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Une telle matrice est aussi notée $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

**Cas particulier :** On note $I_n$ la matrice suivante de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1\,,1\,,\dots,1)$.

La matrice $\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda\,,\lambda\,,\dots,\lambda)$ est une matrice diagonale, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
Une telle matrice est appelée matrice scalaire.

**Matrices triangulaires supérieures :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure lorsque : $\forall i,j,\ i > j \implies a_{i,j} = 0$.
Une matrice triangulaire supérieure est donc du type suivant : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

**Matrices triangulaires inférieures :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure lorsque : $\forall i,j,\ i < j \implies a_{i,j} = 0$.
Une matrice triangulaire inférieure est donc du type suivant : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

**Remarques :**
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et inversement.
- Une matrice carrée est diagonale si et seulement si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- Les définitions de matrices triangulaires se généralisent pour des matrices quelconques de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

## 3.2 L'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

**Hors programme :** L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ vérifient certaines propriétés classiques.
On dit que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +\,,\cdot\,,\times)$ est une « $\mathbb{K}$-algèbre ».

**Proposition 3.3** (neutre pour la multiplication)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $AI_n = I_nA = A$.

**Remarque :** Le produit d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $\lambda I_n$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) est égal à $\lambda A$, quel que soit le sens dans lequel on fait le produit. Ceci justifie le nom de *matrice scalaire* pour une matrice de la forme $\lambda I_n$.

**Définition 3.4** (puissance d'une matrice)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $A^p \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.

Par convention, $A^0 = I_n$.

**Proposition 3.5** (non commutativité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, diviseurs de zéro et éléments nilpotents)

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

1. Il existe des matrices $A$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB \neq BA$.
   On dit que de telles matrices ne commutent pas et que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif.
2. Il existe des matrices $A$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $AB = 0$.
   On dit que de telles matrices sont des diviseurs de zéro et que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre.
3. Il existe des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \neq 0$ et $A^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.
   On dit que de telles matrices sont nilpotentes.

**Proposition 3.6** (formules du binôme de Newton et de factorisation dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A$ et $B$ **commutent**. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Alors
$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k\, B^{p-k} \qquad \text{et} \qquad A^p - B^p = (A-B) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k\, B^{p-1-k}$$

**Remarque :** L'hypothèse de commutativité est à vérifier, on utilise souvent ces formules avec $A$ ou $B$ de la forme $\lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

**Exemple 3.7 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Proposition 3.8** (produit de matrices diagonales, triangulaires supérieures, inférieures)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $A$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $A$ et $B$ sont triangulaires supérieures, alors $AB$ est triangulaire supérieure.
2. Si $A$ et $B$ sont triangulaires inférieures, alors $AB$ est triangulaire inférieure.
3. Si $A$ et $B$ sont diagonales, alors $AB$ est diagonale.

De plus, dans chaque cas, le $i$-ième coefficient **diagonal** de $AB$ est égal au produit des $i$-èmes coefficients diagonaux de $A$ et de $B$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

## 3.3 Inversibilité et inverse d'une matrice carrée

**Définition 3.9** (matrice inversible et inverse)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$ est appelée inverse de $A$.
On dit que $A$ est inversible lorsqu'elle possède un inverse.
Lorsque c'est le cas, $A$ possède un unique inverse, noté $A^{-1}$.

**Proposition 3.10** (l'inversibilité à gauche ou à droite est suffisante)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
Alors la matrice $A$ est inversible, et $B = A^{-1}$.

**Exemple 3.11 :** Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Proposition 3.12** (inversibilité et inverse d'un produit)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $A$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si $A$ et $B$ sont inversibles, alors $AB$ est inversible, et on a l'égalité $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Proposition 3.13** (inversibilité et inverse d'une transposée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice $A$ est inversible si et seulement si $A^T$ est inversible. Dans ce cas, on a : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

**Proposition 3.14** (groupe linéaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, la loi $\times$ est interne, associative, possède un élément neutre qui est $I_n$ et tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est inversible pour $\times$.
On dit que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un « groupe », appelé groupe linéaire d'ordre $n$.
Ce groupe n'est pas commutatif si $n \geqslant 2$.

**Cas des matrices diagonales et triangulaires :**

**Proposition 3.15** (inversibilité et inverse d'une matrice diagonale)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.
La matrice $D$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux $\lambda_i$ sont non nuls.
Lorsque c'est le cas, $D^{-1} = \mathrm{diag}({\lambda_1}^{-1}, \dots, {\lambda_n}^{-1})$.

**Proposition 3.16** (inversibilité d'une matrice triangulaire supérieure)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure.
La matrice $A$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Lorsque c'est le cas, la matrice inverse $A^{-1}$ est elle aussi triangulaire supérieure, et ses coefficients **diagonaux** sont les inverses des coefficients diagonaux de $A$.

**Remarque :** On a le même résultat concernant les matrices triangulaires inférieures.

# 4 Systèmes linéaires et opérations élémentaires

## 4.1 Systèmes linéaires

**Écriture matricielle d'un système linéaire :** Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Tout système linéaire de $n$ équations et $p$ inconnues peut s'écrire sous forme matricielle $(S)$ : $AX = B$, avec :

- $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (données) ;
- $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (inconnue).

Le système sans second membre $(S_H)$ : $AX = 0$ est appelé système homogène associée.

**Exemple 4.1 :** Écrire le système linéaire $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 5 \\ x_1 + 3x_2 & = 7 \end{cases}$ sous forme matricielle et déterminer son système homogène associé.

**Théorème 4.2** (structure affine de l'ensemble des solutions d'un système linéaire)

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On considère le système linéaire d'écriture matricielle $(S)$ : $AX = B$.
On note $(S_H)$ : $AX = 0$ le système homogène associé.
Deux cas peuvent se produire :

1. Le système $(S)$ est compatible, c'est-à-dire que $(S)$ possède au moins une solution $X_0$.
   Dans ce cas, l'ensemble des solutions de $(S)$ peut s'écrire :
   $$\left\{X_0 + X_H \mid X_H \text{ solution de } (S_H)\right\}$$
2. Le système $(S)$ est incompatible, c'est-à-dire qu'il n'a pas de solution.

**Remarque :** On a déjà vu que $AX$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$.
On en déduit que $(S)$ est compatible si et seulement si $B$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$.

**Exemple 4.3 :** Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_1 + x_3 & = 3 \\ x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$.

## 4.2 Interprétation des opérations élémentaires en termes de produit matriciel

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les lignes de $A$, et $C_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ les colonnes de $A$. On a la correspondance suivante entre opérations élémentaires sur $A$ et produit matriciel :

| **opération élémentaire** | **nouvelle matrice** |
|---|---|
| $L_i \leftrightarrow L_j \quad (i \neq j)$ | $PA$ avec $P = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ |
| $L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0)$ | $PA$ avec $P = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ |
| $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad (i \neq j)$ | $PA$ avec $P = I_n + \lambda E_{i,j}$ |
| $C_i \leftrightarrow C_j \quad (i \neq j)$ | $AQ$ avec $Q = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ |
| $C_i \leftarrow \lambda C_i \quad (\lambda \neq 0)$ | $AQ$ avec $Q = I_p + (\lambda - 1)E_{i,i}$ |
| $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j \quad (i \neq j)$ | $AQ$ avec $Q = I_p + \lambda E_{j,i}$ |

**Remarque :** Les matrices $P$ et $Q$ par lesquelles on multiplie la matrice $A$ sont inversibles.
On les obtient en appliquant à la matrice $I_n$ ou $I_p$ l'opération élémentaire correspondante.
Leur inverse correspond à l'opération élémentaire réciproque.

**À retenir :** Faire des transformations élémentaires sur les **lignes** revient à multiplier à **gauche** par une matrice inversible et faire des transformations élémentaires sur les **colonnes** revient à multiplier à **droite** par une matrice inversible.

**Proposition 4.4** (les opérations élémentaires préservent l'inversibilité)

Pour une matrice carrée, les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

## 4.3 Méthode du pivot de Gauss ou algorithme de Gauss-Jordan

**Principe de la méthode :** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour $i$ allant de 1 à $\min(n,p)$, on applique les opérations élémentaires suivantes sur les lignes de $A$ :

1. S'il existe un coefficient non nul sur la $i$-ème colonne et à partir de la ligne $i$, on en choisit un et on le ramène sur la ligne $i$ par un échange de lignes.
   (Sinon, on revient directement au début de cette étape en incrémentant $i$.)
   Le nouveau coefficient en position $(i,i)$ est donc non nul : ce sera notre **pivot**.
2. On place des 0 en-dessous du pivot par des opérations élémentaires du type $L_k \leftarrow L_k - \lambda L_i$.

La méthode du pivot de Gauss permet d'obtenir une matrice **triangulaire supérieure** par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

**Application à la résolution de systèmes linéaires :** En appliquant la méthode du pivot de Gauss à un système linéaire, on obtient un système linéaire échelonné, que l'on peut ensuite facilement résoudre en remontant les équations.
Si le système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$, on peut travailler sur la « matrice augmentée » $(A|B)$ qui est le tableau constitué de $A$ et de $B$ séparés par une barre, **à condition de ne faire que des transformations élémentaires sur les lignes**.

**Exemple 4.5 :** Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles $x_1,x_2,x_3$ suivant : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

**Proposition 4.6** (lien entre calcul d'inverse et résolution de système linéaire carré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, possède une unique solution si et seulement si la matrice $A$ est inversible.
Lorsque c'est le cas, l'unique solution du système linéaire est donnée par $X = A^{-1}B$. On dit alors qu'on a un système de Cramer.
Toujours dans ce cas, l'inverse de $A$ est l'unique matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = B \Leftrightarrow X = MB$$

**Remarque :** Un système de Cramer peut être résolu en appliquant à la matrice augmentée $(A \mid B)$ une suite d'opérations élémentaires **sur les lignes** de manière à arriver à $(I_n \mid X)$. L'unique solution est alors le vecteur $X$.

**Exemple 4.7 :** Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles $x_1,x_2,x_3$ suivant : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

**Application à l'inversion d'une matrice (méthode 1) :** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On fixe $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ générique et on résout le système $AX = B$. Si on trouve une unique solution, alors $A$ est inversible. De plus, si cette solution s'écrit $MB$ avec $M \in \mathscr{M}_n(K)$ alors $A^{-1} = M$.

**Application à l'inversion d'une matrice (méthode 2) :** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
La matrice $A$ est inversible si et seulement si la matrice que l'on obtient par la méthode du pivot de Gauss est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux **non nuls**.
Lorsque c'est le cas, on peut alors compléter la suite d'opérations élémentaires sur les lignes de manière à arriver à la matrice $I_n$.
Dans ce cas, la matrice $A^{-1}$ peut être obtenue à partir de la matrice $I_n$ en appliquant la même suite d'opérations élémentaires **sur les lignes**.

**Exemple 4.8 :** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, expliciter $A^{-1}$.